جبور لي القابلة للحل :

تعريف :

ليكن A جبر لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية R. لنضع

$D^0A = A$

$D^1 = [A,A] = [D^0A, D^0A]$

$D^2A = [D^1A, D^1A] = [[A,A],[A,A]]$

$D^3A = [D^2A, D^2A]$

⋮

$\forall k \in N^* : D^kA = [D^{k-1}A, D^{k-1}A]$

⋮

مبرهنة :

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R عندئذٍ لأجل كل $n \in N$ فإن .

$* \; D^nA \subseteq D^{n-1}A$

البرهان بالاستقراء حسب n :

لأجل n=1 فإن

$D^1A = [A,A] \subseteq A = D^0A$

لأجل n=2 فإن

$D^2A = [D^1A, D^1A] \subseteq [A,A] = D^1A$

نفرض أن القضية * صحيحة لأجل k أي أن

$D^kA \subseteq D^{k-1}A$

$D^{k+1}A = [D^kA, D^kA] \subseteq [D^{k-1}A, D^{k-1}A] = D^kA$

ومنه القضية صحيحة لأجل كل $n \in N$

تعريف :

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R عندئذٍ

① $A \supseteq D^0A \supseteq D^1A \supseteq D^2A \supseteq \dots$ متتالية متناقصة

② إذا كان $n \in N$ فإن D^nA مثالي في A

③ نأتي أن $n \in N$ ثابت $D^n A$ مثالي مميز في A

④ نأتي أن $n \in N$ ثابت $D^{n+1}A$ مثالي في $D^n A$

⑤ نأتي أن $n \in N$ ثابت $D^{n+1}A$ موحد جزئي في $D^n A$

⑥ نأتي أن $n \in N$ ثابت $D^n A$ جبري جزئي في A

تعريف:

نقول عن جبر لي A منتهٍ على الحقل R إنه قابل للحل إذا وجد $n \in N$ بحيث

$D^n A = 0$

ونسمي أصغر عدد صحيح موجب m الذي يحقق

$D^m A = 0$ ناقص $D^{m-1} A \neq 0$

بطول قابلية الحل

نتعرف عن المثالي I في A إنه قابل للحل إذا وجد $n \in N$ بحيث يكون $D^n I = 0$

ونسمي أكبر مثالي قابل للحل في A بالجذر الجبري لـ A ونرمز له $Rad\,A$

مبرهنة:

كل جبر لي منتهٍ على الحقل بعده 2 يكون قابل للحل

البرهان:

ليكن A جبر لي منتهٍ على الحقل F ولنفرض أن $\dim_F A = 2$ إن A فضاء متجهي منتهٍ على الحقل F بعده 2. لنفرض أن $\{e_1, e_2\} \subset F$ القاعدة للفضاء A على F

عندئذ أياً كان $a \in A$ فإن a يكتب بصورة وحيدة على الشكل

$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

حيث $\lambda_1, \lambda_2 \in F$. أصبح أن $D A \neq 0$ لنميز حالتين:

الحالة الأولى:

$[e_1, e_2] = c_1 e_1 \;;\; c_1 \in F$

ولكن $Z \in D'A$ حيث $Z \in D'A = [A, A]$

$z = [x, y] \;;\; x, y \in A$

$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in F$

$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \qquad \beta_1, \beta_2 \in F$

$$Z = [x, y] = [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 , \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2]$$

$$= \alpha_1 \beta_1 [e_1, e_1] + \alpha_1 \beta_2 [e_1, e_2] + \alpha_2 \beta_1 [e_2, e_1] + \alpha_2 \beta_2 [e_2, e_2]$$

$$Z = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)[e_1, e_2] = \underbrace{(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) c_1}_{\in F} e_1 = \alpha e_1$$

حيث $\alpha = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) c_1 \in F$ وإذا سبق أن

$$\underline{DA} = \{ \underline{\alpha e_1} ; \alpha \in F \} \neq 0$$

والذي يشكل مثالي جزئي في A بعده 1

لكن $Z' \in D^2 A = [D'A, D'A]$ عندئذٍ $Z' = [x', y'] ; x', y' \in \underline{DA}$

$$x' = \alpha e_1 \qquad y' = \beta e_1 \qquad \alpha, \beta \in F$$

$$Z' = [x', y'] = [\alpha e_1 , \beta e_1] = \alpha\beta [e_1, e_1] = 0$$

ومنه فإن $D^2 A = 0$ وبالتالي فإن الجبر A قابل للحل

انتهت المحاضرة